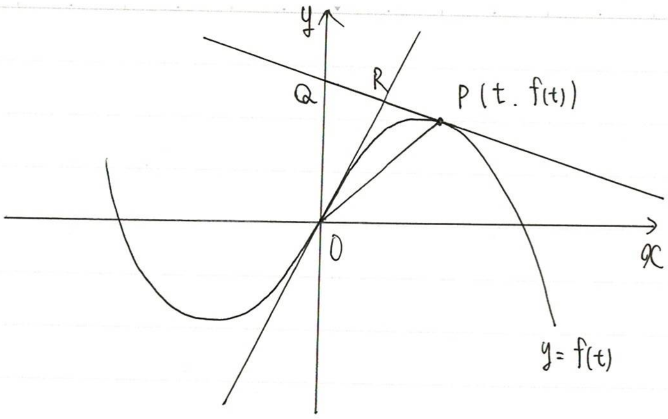
1995年　東大数学　文系第3問. ①



$\boxed{\text{解法1}}$ 角の二等分線の定理 の利用

・点Pでの接線は、

$y = f'(t)(x - t) + f(t)$

$\Leftrightarrow y = (-3t^2 + a)x + 2t^3$ ・・・①

点Pを(t. f(t))とおく tとaの関係を求めたい。

$x=0$ を代入して. $y = 2t^3$　∴ $Q(0, 2t^3)$

直線ORの方程式は

$y = f'(0)x \Leftrightarrow y = ax$

①と連立すると.

$(-3t^2 + a)x + 2t^3 = ax$

∴ $x = \frac{2}{3}t$　$R\left(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}ta\right)$

角の二等分線の定理より

角の二等分線が出たら.思い出そう

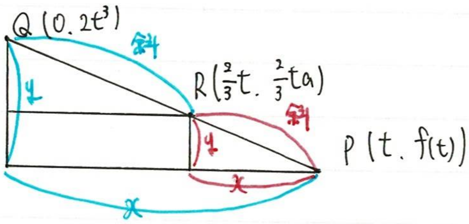
$OP : OQ = PR : RQ$

$= \left(t - \frac{2}{3}t\right) : \left(\frac{2}{3}t - 0\right)$

$= \frac{1}{3}t : \frac{2}{3}t$

$= 1 : 2$

※ 斜めの比を. x座標の差の比や. y座標の差の比にしても よい。



$OP : OQ = 1:2$ より $4OP^2 = OQ^2$ なので.

$4\{(t-0)^2 + (-t^3+at)^2\} = (2t^3)^2$

$\cancel{4}(t^2 + t^6 - 2at^4 + a^2t^2) = \cancel{4}t^6$

$-2at^4 + (a^2+1)t^2 = 0$

$t^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(a + \frac{1}{a}\right)$ (∵ a+t

tとaの関係式が出た

$S(a) = \frac{1}{2} \times OQ \times (\text{Pのx座標})$

底辺　高さ

$= \frac{1}{2} \times 2t^3 \times t$

$= t^4$

$= \left\{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right\}^2$

ここで. $a>0$ より 相加平均相乗平均の関係から.

$a + \frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 2$ (等号成立は $a = \frac{1}{a}$ から $a=1$)

なので.

$S(a) = \left\{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right\}^2$

$\geqq \left\{\frac{1}{2} \times 2\right\}^2$

$= 1$

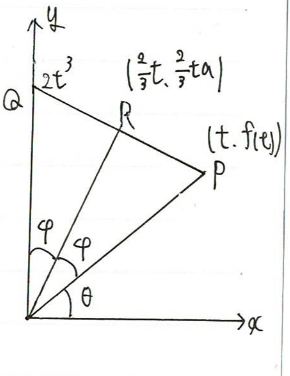
よって $a=1$ の時. $S(a)$ の最小値は1 //

$\boxed{\text{解法2}}$ tan の利用

(OP の傾き) $= f(t) \div t = -t^2 + a$

(OR の傾き) $= a$　なので.

右のように θとφをおくと.



$\tan\theta = -t^2 + a$　$\tan(\theta+\varphi) = a$

$\theta + 2\varphi = \frac{\pi}{2}$ なので. $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\varphi$ より

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = \frac{1}{\tan 2\varphi}$, $\tan(\theta+\varphi) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{\tan\varphi}$ なので.

$\frac{1}{\tan 2\varphi} = -t^2 + a$, $\frac{1}{\tan\varphi} = a$

$\tan 2\varphi = \frac{1}{-t^2+a}$, $\tan\varphi = \frac{1}{a}$

$\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1 - \tan^2\varphi}$ に代入して. $\frac{1}{-t^2+a} = \frac{2 \times \frac{1}{a}}{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^2}$

これを解いて. $t^2 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$　以下. 解法1と同じ.

1995年　東大数学　文系第3問 ②

$\boxed{\text{解法3}}$ ベクトルの利用

$\angle POR = \angle ROQ$ なので

$\cos\angle POR = \cos\angle ROQ$ である。

$$\cos\angle POR = \frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}}{|\overrightarrow{OP}|\,|\overrightarrow{OR}|}$$

$$\cos\angle ROQ = \frac{\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OR}|\,|\overrightarrow{OQ}|}$$ なので

$$\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}}{|\overrightarrow{OP}|\cancel{|\overrightarrow{OR}|}} = \frac{\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\cancel{|\overrightarrow{OR}|}|\overrightarrow{OQ}|}$$

$\overrightarrow{OP} = (t, -t^3 + at)$　$\overrightarrow{OR} = \left(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}ta\right)$, $\overrightarrow{OQ} = (0, 2t^3)$

なので

$$\frac{t\times\frac{2}{3}t + (-t^3+at)\frac{2}{3}ta}{\sqrt{t^2+(-t^3+at)^2}} = \frac{\frac{2}{3}t\times 0 + \frac{2}{3}ta\times 2t^3}{2t^3}$$

$\Leftrightarrow$ …　(頑張る)

$\Leftrightarrow$　$t^2 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$　　以下、解法1と同じ